

Компактная схема для моделирования динамики конкурирующих популяций на неоднородном ареале

Б. Х. Нгуен^{1,*}, Т. Д. Ха², В. Г. Цибулин¹

¹Южный федеральный университет, 344006, Ростов-на-Дону, Россия

²Вьетнамско-Венгерский индустриальный университет, 154000, Ханой, Вьетнам

*Контактный автор: Нгуен Быу Хоанг, e-mail: kng@sfedu.ru

Поступила 02 декабря 2023 г., доработана 25 марта 2024 г., принята в печать 01 апреля 2024 г.

Для решения задач популяционной динамики на основе уравнений реакции–диффузии–адвекции, учитывающих направленную миграцию на ресурс и конкуренцию видов, предложена компактная схема метода конечных разностей с дискретизацией, использующей смешанные сетки по пространственной координате. Реализована схема метода прямых с аппроксимацией по пространству на трехточечном шаблоне и использованием интеграторов по времени высокого порядка. Проведены вычислительные эксперименты для нелинейных уравнений с переменными коэффициентами при различных граничных условиях. Представлены результаты расчетов задач с точными решениями для оценки точности и порядка аппроксимации. Продемонстрирована эффективность данной схемы для расчета динамики трех конкурирующих за неоднородный ресурс видов.

Ключевые слова: компактная схема, неоднородный ареал, система конкурирующих популяций.

Цитирование: Нгуен Б.Х., Ха Т.Д., Цибулин В.Г. Компактная схема для моделирования динамики конкурирующих популяций на неоднородном ареале. Вычислительные технологии. 2024; 29(5):30–42. DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.004.

Введение

Проведение вычислительного эксперимента для систем популяционной динамики при нечетко определенных значениях параметров требует расчета большого количества вариантов. Для решения уравнений реакции–диффузии–адвекции, описывающих поведение конкурирующих видов, эффективным представляется использование аппроксимаций повышенного порядка точности, развитых для решения задач математической физики [1–3].

Компактные схемы [2] обеспечивают хорошее качество построенных на стандартных шаблонах разностных аппроксимаций и высокую эффективность численных алгоритмов. Развитие получили также бикомпактные схемы [4] и мультиоператорный метод [3, 5]. Так, для уравнений Эйлера и Навье–Стокса предложены компактные разностные схемы, обладающие высокими порядками аппроксимации [6]. В [7] представлен обзор работ по численным методам повышенной точности, предназначенным для расчета разрывных решений гиперболических систем. В [8] предложен симбиоз компактных схем и специальных аддитивных сеток, явно задаваемых на основе априорных оценок

производных решения. Эффективная двухслойная безытерационная схема четвертого порядка точности для двумерного уравнения Гинзбурга – Ландау разработана в [9].

Современное состояние развития разностных схем повышенного порядка точности представлено в работах [10–12]. В частности, разработаны алгоритмы компактных схем для решения нелинейных уравнений адвекции – диффузии [10], трехмерных задач на неравномерной сетке [11], уравнений реакции – диффузии с переменными коэффициентами [12]. Применение схем повышенного порядка точности для проблем математической биологии встречается достаточно редко. В [13, 14] исследованы монотонные разностные схемы для уравнений Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера и Бюргерса – Фишера, обеспечивающие четвертый порядок по пространственной координате и второй – по времени.

В данной работе для решения нелинейных уравнений динамики конкурирующих видов используется метод прямых. Дискретизация одномерных по пространственной переменной задач проводится на компактном трехточечном шаблоне с применением смещенной сетки для вычисления потоков. Для интегрирования по времени применяется метод Рунге – Кутты высокого порядка.

1. Математическая модель конкурирующих видов

Для описания пространственно-временного взаимодействия конкурирующих видов используются уравнения реакции – диффузии – адвекции. В случае одномерного ареала математическая модель может быть записана в виде системы уравнений относительно плотностей $u_i(x, t)$, $x \in \Omega$, потоков q_i и локальных реакций g_i , $i = 1, \dots, m$, [15]

$$\dot{u}_i = -q'_i + g_i, \quad q_i = -k_i u'_i + u_i \varphi'_i, \quad g_i = r_i u_i \left(1 - \frac{1}{p(x)} \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_j(x, t) \right), \quad (1)$$

где штрихом обозначена производная по x , а точкой – дифференцирование по времени t . В выражении для потоков q_i первое слагаемое характеризует диффузию, а второе – отвечает за направленную миграцию (таксис). Функция φ_i состоит из двух частей, которые определяют различные виды направленной миграции: таксис на ресурс $p = p(x)$ и от мест с избыточным скоплением видов.

$$\varphi_i = a_i p + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

В уравнениях потоков коэффициенты k_i , a_i , b_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) являются величинами, значения которых определяются из данных наблюдения. Функция $p(x)$ описывает неравномерное распределение ресурса вдоль ареала. В функциях g_i , описывающих локальное взаимодействие, r_i есть параметр линейного роста, а коэффициенты α_{ij} характеризуют влияние вида j на рост вида i .

Система (1), (2) дополняется краевыми условиями при $x = 0$ и $x = a$, ниже рассмотрены примеры для условий трех типов. Начальные условия задаются для плотностей вида

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Для системы (1)–(3) возможны различные решения: стационарные распределения, бегущие волны. При дополнительных соотношениях на параметры может возникать мультистабильность в виде семейств стационарных ($m > 1$) и нестационарных ($m > 2$) решений [16].

2. Разностная схема повышенного порядка точности

Для дискретизации (1) по пространственной координате [1] перепишем уравнения, введя обозначение F_i для разности реакции g_i и производной от плотности:

$$-q'_i + F_i = 0, \quad F_i = -\dot{u}_i + g_i \quad (4)$$

$$q_i + k_i u'_i - u_i \varphi'_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

В случае краевых условий Дирихле на отрезке $[0, a]$ вводится равномерная сетка $x_s = sh$, $s = 0, \dots, n$, $h = a/n$. При вычислении потоков используется вспомогательная сетка $x_{s-1/2} = sh - h/2$, $s = 1, \dots, n$. Далее определяются операторы разностной производной и вычисления среднего

$$(dy)_s = \frac{y_{s+1/2} - y_{s-1/2}}{h}, \quad (\delta y)_s = \frac{y_{s+1/2} + y_{s-1/2}}{2}, \quad (dy)_{s-1/2} = \frac{y_s - y_{s-1}}{h}, \quad (\delta y)_{s-1/2} = \frac{y_s + y_{s-1}}{2}.$$

Для аппроксимации системы уравнений (4), (5) по пространственной координате применяется метод баланса [1].

Интегрируя (5) по отрезку $[x_{s-1}, x_s]$, получаем

$$q_{i,s-1/2} = -k_i (du_i)_{s-1/2} + (\delta u_i)_{s-1/2} (d\varphi_i)_{s-1/2}.$$

С учетом (2) имеем

$$q_{i,s-1/2} = \left(-k_i du_i + a_i d\rho \delta u_i + \delta u_i \sum_{j=1}^m b_{ij} du_j \right)_{s-1/2}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Интегрируем (4) по отрезку $[x_{s-1/2}, x_{s+1/2}]$ и применяем квадратурную формулу Симпсона

$$0 = \int_{x_{s-1/2}}^{x_{s+1/2}} (-q'_i + F_i) dx \approx -q_i(x_{s+1/2}) + q_i(x_{s-1/2}) + (x_{s+1/2} - x_{s-1/2}) \left(\frac{1}{6} F_{i,s-1/2} + \frac{2}{3} F_{i,s} + \frac{1}{6} F_{i,s+1/2} \right).$$

Для вычисления F в узлах смещенной сетки $x_{s-1/2}$ используем полусумму $F_{i,s-1}$ и $F_{i,s}$. В результате имеем

$$(dq_i)_s = \frac{1}{12} (F_{i,s-1} + 10F_{i,s} + F_{i,s+1}), \quad s = 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

С использованием второй разностной производной

$$\Lambda y_s = \frac{y_{s+1} - 2y_s + y_{s-1}}{h^2}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

перепишем уравнение (6)

$$\left(E + \frac{h^2}{12} \Lambda \right) \dot{u}_{i,s} = -(dq_i)_s + \left(E + \frac{h^2}{12} \Lambda \right) g_{i,s}, \quad i = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где E – единичная матрица и

$$g_{i,s} = r_i u_{i,s} \left(1 - \frac{1}{p_s} \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_{j,s} \right), \quad p_s = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{s-1/2}}^{x_{s+1/2}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1}.$$

В результате дискретизации по пространственной переменной получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными $u_{i,s}(t)$, соответствующими плотности распределения популяции u_i в узле x_s . Построенная конечномерная модель (6), (7) может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{W}} = \Phi(\mathbf{W}), \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0, \quad (8)$$

здесь $\mathbf{W} = (u_{1,1}, \dots, u_{1,n}, \dots, u_{m,n})$ — вектор значений переменных в узлах сетки. Примеры построения $\Phi(\mathbf{W})$ даны ниже. Начальные данные для системы (8) следуют из (3):

$$\mathbf{W}_0 = (u_{1,1}^0, \dots, u_{1,n}^0, \dots, u_{m,n}^0).$$

Для интегрирования системы (8) по времени используется метод Рунге–Кутты высокого порядка (интегратор по времени ode89 из MATLAB).

3. Диффузия популяции на неоднородном ареале

Рассмотрим применение описанного подхода для решения задачи диффузионного распространения одного вида ($u \equiv u_1$, $k = k_1$, $\varphi_1 = 0$) на неоднородном ареале $[0, a]$

$$\dot{u} = ku'' + g, \quad g(x, u) = ru \left(1 - \frac{u}{p(x)} \right). \quad (9)$$

Вычислительные эксперименты проводились для трех типов краевых условий:

1) Дирихле

$$u(0, t) = u(a, t) = 0; \quad (10)$$

2) Неймана (отсутствие потоков)

$$u'(0, t) = u'(a, t) = 0; \quad (11)$$

3) периодичности

$$u(0, t) = u(a, t), \quad u'(0, t) = u'(a, t). \quad (12)$$

В случае задачи Дирихле (10) схема повышенного порядка точности следует из (7) и (9)

$$\left(\dot{u} + \frac{h^2}{12} \Lambda \dot{u} \right)_s = \left(k \Lambda u + g + \frac{h^2}{12} \Lambda g \right)_s, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad u_0 = u_n = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записана в векторном виде

$$M \dot{\mathbf{U}} = k L \mathbf{U} + MG(\mathbf{U}), \quad (13)$$

здесь

$$\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_{n-1})^T, \quad G(\mathbf{U}) = (g_1, \dots, g_{n-1}), \quad g_s = ru_s \left(1 - \frac{u_s}{p(x_s)} \right),$$

а квадратные матрицы M и L размера $(n-1)^2$ имеют вид

$$M = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 10 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 10 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad L = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Аналогично [1, 13] показывается, что задача (13), (14) обеспечивает четвертый порядок аппроксимации по h (сокращенно далее обозначается РС4). В случае единичной матрицы M получается разностная схема второго порядка точности (РС2) [1].

Для условий периодичности (12) и сетки из n узлов $x_s = sh$, $s = 0, \dots, n-1$, $h = 1/n$, имеем $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)^T$, $u_0 = u_n$, $G(\mathbf{U}) = (g_1, \dots, g_n)$, матрицы M , L размера n^2 имеют вид

$$M = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 10 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 10 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad L = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Для задачи Неймана сетка строится таким образом, чтобы на границе располагались узлы для потоков $x_s = (s - 1/2)h$, $s = 0, \dots, n+1$, $h = 1/n$, и дополнительно вводятся законтурные узлы для плотности $u(x, t)$. Из условия (11) примем с точностью $\mathcal{O}(h^2)$

$$u_0 = u_1, \quad u_{n+1} = u_n, \quad g_0 = g_1, \quad g_{n+1} = g_n.$$

Тогда для узла $s = 1$ имеем

$$\frac{1}{12}(\dot{u}_2 + 11\dot{u}_1) = k \frac{u_2 - u_1}{h^2} + \frac{1}{12}(g_2 + 11g_1).$$

Аналогично получается формула для $s = n$. Задача для внутренних узлов $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)$ записывается с помощью матриц порядка n^2

$$M = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 11 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 10 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad L = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения схем рассматриваются задачи с решениями, задаваемыми явно. Стационарному решению уравнения (9) $w(x)$ отвечает функция ресурса $p(x)$

$$p(x) = w(x) \left(1 + \frac{kw''(x)}{rw(x)} \right)^{-1}. \quad (15)$$

В качестве решений для задач с условиями Дирихле (10), Неймана (11) и периодичности (12) соответственно берутся распределения (рис. 1)

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 0.1 \sin \pi x + 0.09 \sin 2\pi x + 0.03 \sin 3\pi x, \\ w_2(x) &= 1 + 0.4 \cos \pi x + 0.3 \cos 2\pi x - 0.05 \cos 3\pi x, \\ w_3(x) &= 1 + 0.5 \sin 2\pi x + 0.1 \sin 4\pi x. \end{aligned} \quad (16)$$

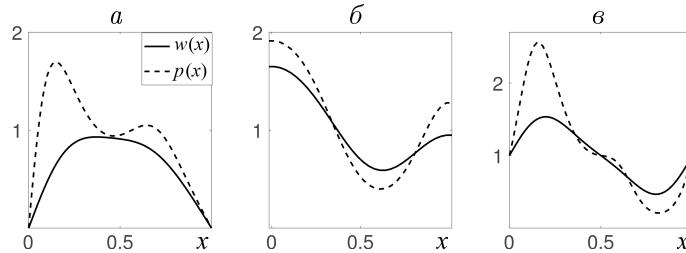


Рис. 1. Распределение стационарного решения $w(x)$ и ресурса $p(x)$ для задач с условиями Дирихле (а), Неймана (б) и периодичности (в)

Fig. 1. Distributions of stationary solution $w(x)$ and resource $p(x)$ for problems with Dirichlet (a), Neumann (b) and periodicity conditions (c)

Т а б л и ц а 1. Сходимость метода конечных разностей и рассчитанный порядок точности для задачи Дирихле

Table 1. Convergence of the finite difference method and the calculated accuracy order for the Dirichlet problem

h	$\ Y_2 - w_1\ $	$\ Y_4 - w_1\ $	$\eta(\text{PC2})$	$\eta(\text{PC4})$
0.2	0.07354	0.01402	—	—
0.1	0.02442	0.00114	2.12	4.15
0.05	0.00835	0.000097	2.05	4.05
0.025	0.0029	0.00004	2.01	4.00

Т а б л и ц а 2. Сходимость метода конечных разностей и рассчитанный порядок точности для задачи Неймана

Table 2. Convergence of the finite difference method and the calculated accuracy order for the Neumann problem

h	$\ Y_2 - w_2\ $	$\ Y_4 - w_2\ $	$\eta(\text{PC2})$	$\eta(\text{PC4})$
0.2	0.0343	0.00413	—	—
0.0667	0.0065	0.000002	2.02	4.04
0.0222	0.0013	0.000002	1.99	3.94

Т а б л и ц а 3. Сходимость метода конечных разностей и рассчитанный порядок точности для задачи с условиями периодичности

Table 3. Convergence of the finite difference method and the calculated accuracy order for the problem with periodicity conditions

h	$\ Y_2 - w_3\ $	$\ Y_4 - w_3\ $	$\eta(\text{PC2})$	$\eta(\text{PC4})$
0.2	0.1138	0.02989	—	—
0.1	0.0381	0.00232	2.06	4.19
0.05	0.0131	0.00019	2.03	4.07
0.025	0.0029	0.00004	2.00	4.08

Далее для параметров диффузии $k = 0.05$ и роста $r = 2.5$ проводятся численный эксперимент на установление к стационарному состоянию и сравнение полученных результатов с точными решениями.

На рис. 1 представлены графики $w_i(x)$ и $p(x)$ для каждой задачи. В табл. 1–3 приведены нормы разности численного и точного решений в узлах используемой сетки. Символами Y_2 , Y_4 обозначены решения, полученные методом второго и четвертого порядков точности. В двух последних столбцах представлены значения порядка метода, рассчитанные на основе схемы Рунге. По результатам расчетов на сетках h и h/ω ($\omega = 2$ для задачи Дирихле и с условиями периодичности, $\omega = 3$ для задачи Неймана) порядок определяется по формуле

$$\eta = \log_{\omega} \frac{\zeta(h)}{\zeta(h/\omega)}, \quad \zeta(h) = \|Y(h) - w\|.$$

Из табл. 1 видно, что для задачи с одним максимумом функции ресурса метод четвертого порядка точности позволяет получить на сетке из десяти узлов распределение, которое находится при 40 узлах на основе схемы РС2. Уменьшение шага разностной схемы РС4 после $h = 0.05$ не дает увеличения точности. Это связано с тем, что установление рассчитывалось методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага по времени, при этом были заданы следующие значения относительной и абсолютной погрешностей соответственно $\varepsilon_{rel} = 10^{-7}$, $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$.

Для схемы с краевыми условиями Дирихле и для задачи с условиями периодичности деление шага пополам позволяет оценивать разности значений в общих узлах. Для схемы с условиями Неймана общие узлы получаются для сеток с h и $h/3$ (см. табл. 2).

4. Схема повышенного порядка точности для системы трех видов

Описанный подход был использован для решения задачи о конкуренции трех видов [15] на неоднородном ареале $[0, 1]$

$$\dot{u}_i = (k_i u'_i - a_i u_i p')' + g_i, \quad g_i = r_i u_i \left(1 - \frac{1}{p(x)} \sum_{j=1}^3 u_j \right), \quad i = 1, \dots, 3, \quad (17)$$

при условиях периодичности

$$u_i(0, t) = u_i(1, t), \quad k_i u'_i(0, t) - a_i u_i(0, t) p'(0) = k_i u'_i(1, t) - a_i u_i(1, t) p'(1). \quad (18)$$

В бездиффузионном приближении $k_i = 0$ и при однородном ресурсе $p(x) = p_0$ задача (17), (18) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет двухпараметрическое семейство стационарных решений [17]

$$u_1 = (1 - \theta_2 - \theta_3)p_0, \quad u_2 = \theta_2 p_0, \quad u_3 = \theta_3 p_0. \quad (19)$$

Это является следствием мультикосимметрии задачи, т. е. существует косимметрия — вектор с произвольным параметром ν :

$$\mathbf{L}_\nu = ((1 - \nu)r_2 u_2 + \nu r_3 u_3, -(1 - \nu)r_1 u_1, -\nu r_1 u_1)^T. \quad (20)$$

Непосредственной проверкой устанавливается ортогональность \mathbf{L}_ν вектору правой части (17). При этом косимметрия \mathbf{L}_ν не аннулируется на равновесиях семейства (19) [18].

При неоднородном ресурсе $p(x)$ для $r_1 = 1$, $k_i = r_i k_1$, $a_i = r_i a_1$ ($i = 2, 3$) система также имеет мультикосимметрию (20) и двухпараметрическое семейство стационарных решений:

$$u_1 = (1 - \theta_2 - \theta_3)w(x), \quad u_2 = \theta_2 w(x), \quad u_3 = \theta_3 w(x),$$

где $w(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$0 = (k_1 w' - a_1 w p')' + w(x) \left(1 - \frac{w(x)}{p(x)} \right), \quad w(0) = w(1), \quad w'(0) = w'(1). \quad (21)$$

В качестве решения задачи (21) при $a_i = 0$ берется распределение $w_3(x)$ (16). При этом функция ресурса $p(x)$ находится по формуле (15). Далее фиксируются значения параметров $k_1 = 0.03$, $k_2 = 0.06$, $k_3 = 0.09$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ и проводится численный

эксперимент на установление к стационарному решению на интервале времени $[0, 10]$ из начальных распределений $u_i^0(x) = 0.1$.

На рис. 2 и 3 представлены графики установления стационарных распределений. Для схемы повышенной точности при $n = 10$ получается решение, близкое к точному (см. рис. 2). При этом схема второго порядка точности дает большие погрешности. Результаты сравнения с точным решением приведены в табл. 4. Видно, что метод четвертого порядка точности позволяет получить на сетке из десяти узлов распределение, которое находится при 40 узлах на основе схемы PC2. На рис. 3 приведены распределения абсолютной погрешности $\varepsilon = w(x) - w_3(x)$ для разных n , здесь $w(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$ — результат численного решения. Полученные распределения погрешности отвечают неоднородности функции ресурса $p(x)$.

Далее на рис. 4 представлены результаты расчетов распределений видов, получающихся для разных начальных условий при учете таксиса: $a_1 = 0.02$, $a_2 = 0.04$, $a_3 = 0.06$. Распределение ресурса при условиях периодичности задавалось в виде

$$p(x) = 1 - 0.2 \sin 2\pi x + 0.2 \sin 4\pi x. \quad (22)$$

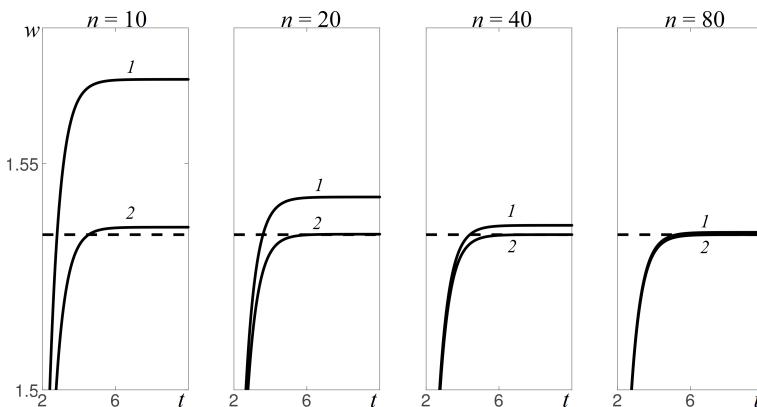


Рис. 2. Установление к $w_3(0.2, t)$ (пунктир) для задач с условиями периодичности при $n = 10, 20, 40, 80$: 1 — решение по схеме второго порядка точности; 2 — решение по компактной схеме
Fig. 2. Convergence to $w_3(0.2, t)$ (dotted line) for problems with periodicity conditions for $n = 10, 20, 40, 80$: 1 — solution using second-order accuracy scheme; 2 — solution using compact scheme

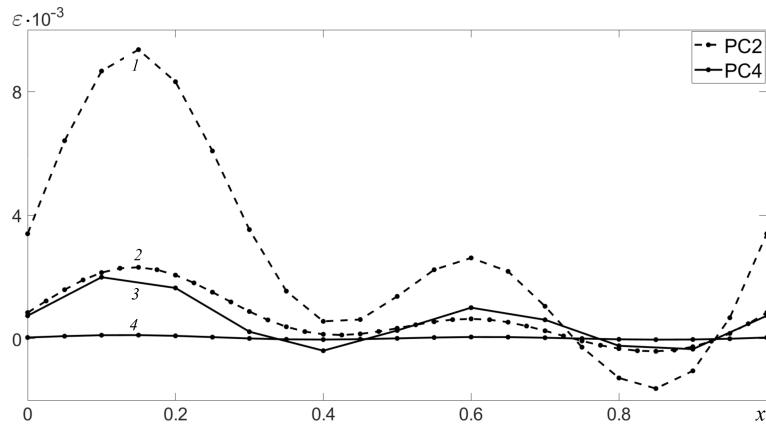


Рис. 3. Погрешность суммы видов ε при $t = 10$: пунктир — PC2, сплошная линия — PC4; $n = 10$ (кривая 3), $n = 20$ (1, 4), $n = 40$ (2)

Fig. 3. Error of the sum of species ε at $t = 10$: dotted line — PC2, solid line — PC4; $n = 10$ (curve 3), $n = 20$ (1, 4), $n = 40$ (2)

Т а б л и ц а 4. Сходимость и рассчитанный порядок точности для задачи (17), (18)

Table 4. Convergence and calculated accuracy order for the problem (17), (18)

h	$\ Y_2 - w_3\ $	$\ Y_4 - w_3\ $	$\eta(\text{PC2})$	$\eta(\text{PC4})$
0.2	0.170321	0.038979	—	—
0.1	0.038878	0.002122	2.1312	4.1995
0.05	0.009466	0.000127	2.0381	4.0609
0.025	0.002351	0.000008	2.0093	4.0153

Т а б л и ц а 5. Вычисление порядка метода (процесс Эйткена) для системы (17), (18)

Table 5. Computing order (Aitken process) for the system (17), (18)

a_i ($i = 1, 2, 3$)	h_1	$\eta(\text{PC2})$	$\eta(\text{PC4})$
0.002 <i>i</i>	0.05	2.2663	4.5400
	0.025	2.0617	3.9367
0.005 <i>i</i>	0.05	2.2629	4.4541
	0.025	2.0606	3.5503

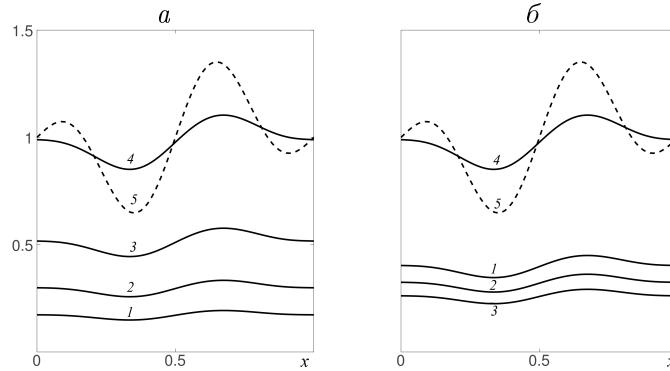


Рис. 4. Мультистабильность стационарных решений для разных начальных распределений $u_i^0(x) = 0.1$ (а) и $u_i^0(x) = 0.5$ (б): кривые 1 — $u_1(x)$, 2 — $u_2(x)$, 3 — $u_3(x)$, 4 — $w(x)$, 5 — $p(x)$

Fig. 4. Multistability of stationary solutions for different initial distributions $u_i^0(x) = 0.1$ (a) and $u_i^0(x) = 0.5$ (b): curves 1 — $u_1(x)$, 2 — $u_2(x)$, 3 — $u_3(x)$, 4 — $w(x)$, 5 — $p(x)$

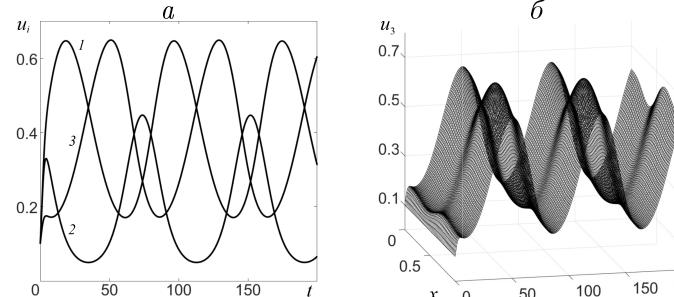


Рис. 5. График зависимости от времени плотностей u_i ($i = 1, 2, 3$) в точке $x = 0.2$ (а) и пространственно-временное распределение $u_3(x, t)$ (б)

Fig. 5. Graph of densities u_i ($i = 1, 2, 3$) versus time at point $x = 0.2$ (a) and space-time distribution $u_3(x, t)$ (б)

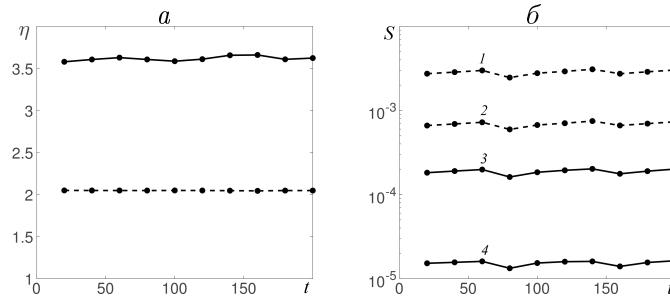


Рис. 6. Порядок точности η (а) и норма S (б): схема повышенной точности (сплошная кривая), схема второго порядка точности (пунктир); кривые 1, 3 — $n_i = 24$, $n_{i-1} = 12$; кривые 2, 4 — $n_i = 48$, $n_{i-1} = 24$

Fig. 6. Accuracy order η (a) and norm S (b): scheme of higher order (solid), second order scheme (dashed); curves 1, 3 — $n_i = 24$, $n_{i-1} = 12$; curves 2, 4 — $n_i = 48$, $n_{i-1} = 24$

В зависимости от начального распределения реализуются различные стационарные решения $u_i(x)$ и одинаковые суммы видов $w(x)$ (рис. 4). Это является следствием косимметричности задачи, при которой формируется двухпараметрическое семейство равновесий.

Пусть W_i — численное решение, полученное на сетке h_i , а $h_{i+1} = h_i/2$. В табл. 5 приведены результаты расчета порядка точности для двух наборов миграционных параметров a_i и разных значений шага h_i

$$\eta_i = \log_2 \frac{S_i}{S_{i+1}}, \quad S_i = \|W_i - W_{i-1}\|.$$

Видно, что для получения решения в случае схемы РС4 достаточно десяти узлов сетки при функции ресурса $p(x)$ с двумя максимумами и минимумами.

При нарушении косимметрии исчезает двухпараметрическое семейство стационарных равновесий. В этом случае возможны сценарии с формированием стационарных и нестационарных решений. На рис. 5 и 6 представлены результаты вычислительных экспериментов (1), (2) при $m = 3$, $b_{ij} = 0$ с системой на сетках: $n = 12, 24, 48$. Для значений параметров: $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0.8$, $\alpha_{13} = 1.1$, $\alpha_{21} = 1.2$, $\alpha_{32} = 1.4$, $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 0.5$, $k_1 = k_2 = 0.05$, $k_3 = 0.02$, $a_1 = a_2 = 0.005$, $a_3 = 0.002$ и при распределении ресурса $p(x)$ (22) получается колебательный режим (рис. 5).

Результаты вычисления порядка точности для разных схем на большом временном промежутке представлены на рис. 6, а, а норм S — на рис. 6, б. Видно, что при существовании колебательного режима компактная схема дает высокую точность в сравнении со схемой второго порядка.

Заключение

Описана компактная схема для анализа динамики конкурирующих популяций на неоднородном ареале. Для дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами применяется метод конечных разностей со смещенными сетками. Проведены вычислительные эксперименты для задач об установлении стационарных распределений популяций на неоднородном ареале и оценены порядки точности при использовании построенной схемы. Представлены результаты расчетов колебательных режимов и продемонстрирована эффективность компактной схемы повышенного порядка точности.

Благодарности. Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00221).

Список литературы

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука; 1989: 616.
- [2] Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука; 1990: 232.
- [3] Толстых А.И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука; 2015: 350.

- [4] **Брагин М.Д., Рогов Б.В.** Бикомпактные схемы для многомерного уравнения конвекции–диффузии. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021; 61(4):625–643. DOI:10.31857/S0044466921040025.
- [5] **Савельев А.Д.** О мультиоператорном представлении составных компактных схем. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014; 54(10):1580–1593. DOI:10.7868/S0044466914040140.
- [6] **Савельев А.Д.** Численное моделирование нестационарных дозвуковых течений вязкого газа на основе составных компактных схем высокого порядка. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021; 61(2):281–302. DOI:10.31857/S0044466921020113.
- [7] **Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкун В.Ф., Хандеева Н.А.** Комбинированные численные схемы. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022; 62(11):1763–1803. DOI:10.31857/S0044466922100027.
- [8] **Лисейкин В.Д., Паасонен В.И.** Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями. Сибирский журнал вычислительной математики. 2019; 22(1):41–56. DOI:10.15372/SJNM20190104.
- [9] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная разностная схема без итераций для двумерного уравнения Гинзбурга–Ландау. Вычислительные технологии. 2022; 27(6):58–69. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006.
- [10] **Zhang L., Ge Y.** Numerical solution of nonlinear advection diffusion reaction equation using high-order compact difference method. Applied Numerical Mathematics. 2021; 166:127–145. DOI:10.1016/j.apnum.2021.04.004.
- [11] **Deka D., Sen S.** Compact higher order discretization of 3D generalized convection diffusion equation with variable coefficients in nonuniform grids. Applied Mathematics and Computation. 2022; 413:126652. DOI:10.1016/j.amc.2021.126652.
- [12] **He M., Liao W.** A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with variable diffusion coefficients. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024; 436:115400. DOI:10.1016/j.cam.2023.115400.
- [13] **Матус П.П., Утебаев Б.Д.** Монотонные разностные схемы повышенного порядка точности для параболических уравнений. Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2020; 64(4):391–398. DOI:10.29235/1561-8323-2020-64-4-391-398.
- [14] **Матус П.П., Утебаев Б.Д.** Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера. Дифференциальные уравнения. 2022; 58(7):947–961. DOI:10.31857/S037406412207007X.
- [15] **Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G.** Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. Discrete & Continuous Dynamical Systems — Series B. 2019; 24(2):547–561. DOI:10.3934/dcdsb.2018196.
- [16] **Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G.** Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. Applied Mathematics and Computation. 2021; 410:Art.126456. DOI:10.1016/j.amc.2021.126456.
- [17] **Нгуен Б.Х., Ха Д.Т., Цибулин В.Г.** Мультистабильность для системы трех конкурирующих видов. Компьютерные исследования и моделирование. 2022; 14(6):1325–1342. DOI:10.20537/2076-7633-2022-14-6-1325-1342.
- [18] **Юдович В.И.** Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции. Математические заметки. 1991; 49(5):142–148.

Compact scheme for modelling competing dynamics of populations on a heterogeneous environmentB. H. NGUYEN^{1,*}, T. D. HA², V. G. TSYBULIN¹¹Southern Federal University, 344006, Rostov-on-Don, Russia²Viet-Hung Industrial University, 154000, Hanoi, Viet Nam*Corresponding author: Buu H. Nguyen, e-mail: kng@sfedu.ru*Received December 02, 2023, revised March 25, 2024, accepted April 01, 2024.***Abstract**

The research is aimed to describe the numerical method for studying population models based on the reaction – diffusion – advection equations with variable coefficients. It is important to analyze the impact of directed migration towards a resource on temporal-spatial competition of species. We apply a method of lines with a staggered grid for discretizing the nonlinear problems with high order accuracy on three-point stencil in spatial coordinate. To integrate in time, a high-order Runge – Kutta method is used (ode89 in MATLAB). The scheme was tested using special problems allowing exact solutions. We carried out calculations of stationary distributions for species in a heterogeneous environment under various boundary conditions. Numerical estimates of accuracy orders were obtained using the given scheme and compared with the second order approximation analogue. We performed a computational experiment to assess the order of approximation with non-stationary regimes using the Aitken process. Our results demonstrate the effectiveness of a compact scheme for calculating the dynamics of three species competing in a heterogeneous habitat.

Keywords: compact schemes, heterogeneous environment, system of competing populations.

Citation: Nguyen B.H., Ha T.D., Tsybulin V.G. Compact scheme for modelling competing dynamics of populations on a heterogeneous environment. Computational Technologies. 2024; 29(5):30–42. DOI:10.25743/ICT.2024.29.5.004. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was carried out at the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation (grant No. 23-21-00221).

References

1. **Samarskii A.A.** Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka; 1989: 616. (In Russ.)
2. **Tolstykh A.I.** Kompaktnye raznostnye skhemy i ikh primenenie v zadachakh aerogidrodinamiki [Compact difference schemes and their application in aerohydrodynamics]. Moscow: Nauka; 1990: 232. (In Russ.)
3. **Tolstykh A.I.** Kompaktnye i multiooperatornye approksimatsii vysokoy tochnosti dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Compact and high-precision multi-operator approximations for partial differential equations]. Moscow: Nauka; 2015: 350. (In Russ.)
4. **Bragin M.D., Rogov B.V.** Bicompact schemes for the multidimensional convection-diffusion equation. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021; 61(4):607–624. DOI:10.1134/S0965542521040023.
5. **Savel'ev A.D.** Multioperator representation of composite compact schemes. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014; 54(10):1522–1535. DOI:10.1134/S0965542514040137.
6. **Savel'ev A.D.** Numerical simulation of unsteady subsonic viscous gas flows based on highorder composite compact schemes. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021; 61(2):267–287. DOI:10.1134/S096554252102010X.

7. **Bragin M.D., Kovyrkina O.A., Ladonkina M.E., Ostapenko V.V., Tishkin V.F., Khandeva N.A.** Combined numerical schemes. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022; 62(11):1743–1781. DOI:10.1134/S0965542522100025.
8. **Liseikin V.D., Paasonen V.I.** Compact difference schemes and layer resolving grids for numerical modeling of problems with boundary and interior layers. Numerical Analysis and Applications. 2019; 12(1):37–50. DOI:10.1134/S199542391901004X.
9. **Paasonen V.I., Fedoruk M.P.** The compact iteration-free difference scheme for the two-dimensional Ginzburg–Landau equation. Computational Technologies. 2022; 27(6):58–69. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.006. (In Russ.)
10. **Zhang L., Ge Y.** Numerical solution of nonlinear advection diffusion reaction equation using high-order compact difference method. Applied Numerical Mathematics. 2021; 166:127–145. DOI:10.1016/j.apnum.2021.04.004.
11. **Deka D., Sen S.** Compact higher order discretization of 3D generalized convection diffusion equation with variable coefficients in nonuniform grids. Applied Mathematics and Computation. 2022; 413:126652. DOI:10.1016/j.amc.2021.126652.
12. **He M., Liao W.** A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with variable diffusion coefficients. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024; 436:115400. DOI:10.1016/j.cam.2023.115400.
13. **Matus P.P., Utebaev B.D.** Monotone difference schemes of higher accuracy for parabolic equations. Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus]. 2020; 64(4):391–398. (In Russ.)
14. **Matus P.P., Utebaev B.D.** Kompaktnye i monotonnye raznostnye skhemy dlya obobshchennogo uravneniya Fishera [Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation]. Differentsial’nye Uravneniya. 2022; 58(7):937–951.
15. **Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G.** Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. Discrete & Continuous Dynamical Systems — Series B. 2019; 24(2):547–561. DOI:10.3934/dcdsb.2018196.
16. **Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G.** Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. Applied Mathematics and Computation. 2021; 410:Art.126456. DOI:10.1016/j.amc.2021.126456.
17. **Nguyen B.H., Ha D.T., Tsybulin V.G.** Multistability for system of three competing species. Computer Research and Modelling. 2022; 14(6):1325–1342. (In Russ.)
18. **Yudovich V.I.** Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection. Mathematical Notes. 1991; 49(5):540–545. DOI:10.1007/BF01142654.